第27卷 第2期 工 程 数 学 学 报 Vol. 27 No. 2
2010年04月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS Apr. 2010

文章编号:1005-3085(2010)02-0305-08

常利率下有阈红利边界的Erlang(2)风险模型的罚金折现期望函数*

刘向增[1]， 田 铮[1]， 张 燕[2]

(1- 西北工业大学应用数学系，西安 710072； 2- 中国人民解放军理工大学数学系，南京 211101)

摘 要：为了精确地描述风险投资商实际的经营状况，本文将一般的Erlang(2)风险模型推广为常利率下有阈红利边界的Erlang(2)风险模型。首先利用全概率公式对风险过程进行分析，得到了模型的罚金折现期望函数所满足的积分-微分方程及积分方程，然后在不带利率时将积分方程简化为“第二类非其次Volterra积分方程”，给出了罚金折现期望函数的确切表达式，最后给出了不带利率时模型的破产概率及破产前瞬时盈余和破产赤字的联合分布的表达式。

关键词：Erlang(2)风险过程；罚金折现期望函数；阈红利边界；积分-微分方程

分类号：AMS(2000) 62P05 **中图分类号**：O211.9 **文献标识码**：A

1 引言

随着对风险理论的深入研究，文献[1]首次定义了经典风险模型的罚金折现期望函数，并由此得到了破产概率及破产前瞬时盈余和破产赤字的联合分布的确切表达式。近年来对风险模型罚金折现期望函数的研究逐渐成为风险理论研究的热点之一，学者们对经典风险模型做了不同程度的推广：一种推广是假定理赔时间间隔服从Erlang(2)分布(如文献[2-6])；另一种推广是考虑了利率或红利对收益的影响(如文献[7-10])。文献[11]将两者结合考虑了常利率下的Erlang(2)风险模型；文献[12]考虑了常利率下的Erlang(2)风险模型的罚金折现期望函数，给出了其满足的积分-微分方程及其Laplace变换满足的二阶微分方程，且在不带利率时给出了罚金折现期望函数的确切表达式。本文考虑常利率下有阈红利边界的Erlang(2)风险模型，即常利率下理赔时间间隔服从Erlang(2)分布，给定一常数$b>0$，当盈余过程$0\le U(t)<b$时不向股东发放红利，当$U(t)\ge b$时以速率r向股东发放红利。这种经营方式既可以吸引顾客又可以减小公司的破产概率，因而更具有现实意义。

2 模型介绍

设(Ω,F,P)为包含本文中涉及的所有随机变量的完备概率测度空间。通常的Erlang(2)风险模型为

$$U(t)=u+ct-\sum_{i=1}^{N(t)}X(i),\quad t>0, \tag{1}$$

收稿日期：2007-06-18. **作者简介**：刘向增(1981年12月生)，男，硕士. 研究方向：应用数学.

***基金项目**：国家自然科学基金(60375003)；国家航空基金(03I53059).

其中$u \geq 0$为初始盈余，$c > 0$为保费率，$N(t)$为到t时刻为止理赔发生的次数，$\{T_i, i \geq 1\}$为两次相邻理赔之间的时间间隔，即

$$N(t) = \max\{n : T_1 + T_2 + \cdots + T_n \leq t\},$$

T_i服从Erlang(2)分布，密度函数为$k(t) = \beta^2 t\mathrm{e}^{-\beta t}$, $t > 0$, $\beta > 0$。$\{X_i, i \geq 1\}$是分布函数为$F(x)$的独立同分布非负随机变量序列，文中假设$\{T_i, i \geq 1\}$, $\{X_i, i \geq 1\}$, $\{N(t), t \geq 0\}$两两相互独立。本文考虑的常利率下有阈红利边界的Erlang(2)风险模型定义如下

$$U_\delta(t) = \begin{cases} u\mathrm{e}^{\delta t} + c_1 \int_0^t \mathrm{e}^{\delta v}\mathrm{d}v - \int_0^t \mathrm{e}^{\delta(t-v)}\mathrm{d}S(v), & 0 \leq U_\delta(t) < b, \\ u\mathrm{e}^{\delta t} + c_2 \int_0^t \mathrm{e}^{\delta v}\mathrm{d}v - \int_0^t \mathrm{e}^{\delta(t-v)}\mathrm{d}S(v), & U_\delta(t) \geq b, \end{cases} \tag{2}$$

其中

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \quad t > 0,$$

$c_1 > 0$是单位时间内的保费收入，$c_2 = c_1 - r$, r是红利率。模型(2)的破产时刻定义为：$T_\delta = \inf\{t \geq 0, U_\delta(t) < 0\}$，若对所有的$t$，有$U_\delta(t) \geq 0$，则$T_\delta = \infty$。模型(2)的破产概率定义为：$\psi_\delta(u) = P\{T_\delta < \infty | U_\delta(0) = u\}$，模型(2)的罚金折现期望函数定义为

$$\phi_\delta(u) = E\{\mathrm{e}^{-\alpha T_\delta}\omega(U_\delta(T_\delta^-), |U_\delta(T_\delta)|)I(T_\delta < \infty) \,|\, U_\delta(0) = u\}. \tag{3}$$

其中$I(\cdot)$为示性函数，α是非负常数，$\mathrm{e}^{-\alpha T_\delta}$为折罚因子，$U_\delta(T_\delta^-)$为破产前瞬时盈余，$|U_\delta(T_\delta)|$为破产赤字，对任意$0 \leq x_1$, $x_2 \leq \infty$, $\omega(x_1, x_2)$是非负有界函数。为方便叙述，将$\psi_\delta(u)$记为如下形式

$$\phi_\delta(u) = \begin{cases} \phi_{1,\delta}(u), & 0 \leq u < b, \\ \phi_{2,\delta}(u), & u \geq b. \end{cases} \tag{4}$$

显然，当$\alpha = 0$, $\omega(x_1, x_2) = 1$时，(3)式即为破产概率$\psi_\delta(u)$；当$\alpha = 0$, $\omega(x_1, x_2) = I(x_1 < x$, $x_2 < y)$时，(3)式则变为破产前瞬时盈余和破产赤字的联合分布。

3 主要结果

本节给出了(4)式满足的积分-微分及积分方程，且当$\delta = 0$时，给出了积分方程的显式解。

定理1 风险模型(2)的罚金折现期望函数$\phi_\delta(u)$满足下面的积分-微分方程

$$\begin{aligned}(u\delta + c_1)^2 \phi_{1,\delta}''(u) &= (2\beta + 2\alpha - \delta)(u\delta + c_1)\phi_{1,\delta}'(u) - (\alpha + \beta)^2 \phi_{1,\delta}(u) \\ &\quad + \beta^2 \int_0^u \phi_{1,\delta}(u - x)\mathrm{d}F(x) + \beta^2 \xi(u), \quad 0 \leq u < b;\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}(u\delta + c_2)^2 \phi_{2,\delta}''(u) &= (2\beta + 2\alpha - \delta)(u\delta + c_2)\phi_{2,\delta}'(u) \\ &\quad - (\alpha + \beta)^2 \phi_{2,\delta}(u) + \beta^2 \int_{u-b}^u \phi_{1,\delta}(u - x)\mathrm{d}F(x) \\ &\quad + \beta^2 \int_0^{u-b} \phi_{2,\delta}(u - x)\mathrm{d}F(x) + \beta^2 \xi(u), \quad 0 \leq u \geq b.\end{aligned} \tag{6}$$

其中

$$\xi(t)=\int_t^{\infty}\omega(t,x-t)\mathrm{d}F(x).$$

证明 考虑首次理赔发生的时刻$T_1=t$和首次理赔额$X_1=x$，有两种可能的情况：

(i) 当

$$0\le t<\frac{1}{\delta}\ln\left[(b\delta+c_1)/(u\delta+c_1)\right]$$

时，t时刻的瞬时盈余额$0\le U_\delta(t^-)<b$，且在t时刻有两种可能：大于0小于b或小于0；

(ii) 当

$$t\ge\frac{1}{\delta}\ln\left[(b\delta+c_1)/(u\delta+c_1)\right]$$

时，t时刻的盈余额$U_\delta(t^-)\ge b$，且在t时刻盈余额有三种可能：小于0或0和b之间或大于b。

由上述讨论，当$0\le u<b$时，由全概率公式得

$$\begin{aligned}\phi_{1,\delta}(u)\ =\ &\int_0^{\frac{1}{\delta}\ln N}\beta^2 t\mathrm{e}^{-(\beta+\alpha)t}\gamma\Big(u\mathrm{e}^{\delta t}+c_1\int_0^t\mathrm{e}^{\delta v}\mathrm{d}v\Big)\mathrm{d}t\\&+\int_{\frac{1}{\delta}\ln N}^{\infty}\int_{b+c_2(t-\frac{1}{\delta}\ln N)}^{\infty}\beta^2 t\mathrm{e}^{-(\beta+\alpha)t}\omega\Big(b+c_2\Big(t-\frac{1}{\delta}\ln N\Big),x-b-c_2\Big(t-\frac{1}{\delta}\ln N\Big)\Big)\mathrm{d}F(x)\mathrm{d}t\\&+\int_{\frac{1}{\delta}\ln N}^{\infty}\int_{c_2(t-\frac{1}{\delta}\ln N)}^{b+c_2(t-\frac{1}{\delta}\ln N)}\beta^2 t\mathrm{e}^{-(\beta+\alpha)t}\phi_{1,\delta}\Big(b+c_2\Big(t-\frac{1}{\delta}\ln N\Big)-x\Big)\mathrm{d}F(x)\mathrm{d}t\\&+\int_{\frac{1}{\delta}\ln N}^{\infty}\int_0^{c_2(t-\frac{1}{\delta}\ln N)}\beta^2 t\mathrm{e}^{-(\beta+\alpha)t}\phi_{2,\delta}\Big(b+c_2\Big(t-\frac{1}{\delta}\ln N\Big)-x\Big)\mathrm{d}F(x)\mathrm{d}t,\end{aligned}\tag{7}$$

其中

$$N=(b\delta+c_1)/(u\delta+c_1),\quad \gamma(t)=\int_0^t\phi_{1,\delta}(t-x)\mathrm{d}F(x)+\xi(t),\quad \xi(t)=\int_t^{\infty}\omega(t,x-t)\mathrm{d}F(x).$$

令$M=b+c_2(t-\frac{1}{\delta}\ln N)$，然后对(7)式两边关于$u$求导数得

$$\begin{aligned}(u\delta+c_1)\phi_{1,\delta}'(u)\ =\ &(\beta+\alpha)\phi_{1,\delta}(u)-\int_0^{\frac{1}{\delta}\ln N}\beta^2 t\mathrm{e}^{-(\beta+\alpha)t}\gamma\Big(u\mathrm{e}^{\delta t}+c_1\int_0^t\mathrm{e}^{\delta v}\mathrm{d}v\Big)\mathrm{d}t\\&-\int_{\frac{1}{\delta}\ln N}^{\infty}\int_M^{\infty}\beta^2 t\mathrm{e}^{-(\beta+\alpha)t}\omega(M,x-M)\mathrm{d}F(x)\mathrm{d}t\\&-\int_{\frac{1}{\delta}\ln N}^{\infty}\int_{M-b}^{M}\beta^2 t\mathrm{e}^{-(\beta+\alpha)t}\phi_{1,\delta}(M-x)\mathrm{d}F(x)\mathrm{d}t\\&-\int_{\frac{1}{\delta}\ln N}^{\infty}\int_0^{M-b}\beta^2 t\mathrm{e}^{-(\beta+\alpha)t}\phi_{2,\delta}(M-x)\mathrm{d}F(x)\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{8}$$

对 (8) 式两边关于 u 求导数可得 (5) 式成立。同理，当 $b \le u$ 时，利用全概率公式得

$$
\begin{aligned}
\phi_{2,\delta}(u) =& \int_0^\infty \int_{\eta(t)}^\infty \beta^2 t\mathrm{e}^{-(\beta+\alpha)t}\omega\big(\eta(t), x-\eta(t)\big)\mathrm{d}F(x)\mathrm{d}t \\
&+ \int_0^\infty \int_{\eta(t)-b}^{\eta(t)} \beta^2 t\mathrm{e}^{-(\beta+\alpha)t}\phi_{1,\delta}\big(\eta(t)-x\big)\mathrm{d}F(x)\mathrm{d}t \\
&+ \int_0^\infty \int_0^{\eta(t)-b} \beta^2 t\mathrm{e}^{-(\beta+\alpha)t}\phi_{2,\delta}\big(\eta(t)-x\big)\mathrm{d}F(x)\mathrm{d}t,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

其中

$$\eta(t) = u\mathrm{e}^{\delta t} + c_2\int_0^t \mathrm{e}^{\delta v}\mathrm{d}v.$$

对 (9) 式两边关于 u 两次求导可得 (6) 式成立。

定理2 对任意的 $u>0$，风险模型 (2) 的罚金折现期望函数 $\phi_\delta(u)$ 满足下面的积分方程

$$
\phi_\delta(u) = \begin{cases} \phi_{1,\delta}(u) = G_1(u) + \int_0^u K_1(u,v)\phi_{1,\delta}(v)\mathrm{d}v, \quad 0 \le u < b, & \text{(i)} \\ \phi_{2,\delta}(u) = G_2(u) + \int_b^u K_2(u,v)\phi_{2,\delta}(v)\mathrm{d}v, \quad u \ge b, & \text{(ii)} \end{cases}
\tag{10}
$$

其中

$$G_1(u) = \Big[\beta^2\int_0^u (u-v)\xi(v)\mathrm{d}v + M(\delta)u + c_1^2\phi_{1,\delta}(0)\Big]\Big/(u\delta+c_1)^2,$$

$$
\begin{aligned}
M(\delta) = \frac{1}{b}\Big[&(b\delta+c_1)^2\phi_{1,\delta}(b) - c_1^2\phi_{1,\delta}(0) - \int_0^b (a_1+a_2b+a_3v)\phi_{1,\delta}(v) \\
&- \beta^2\int_0^b\int_0^v F(v-y)\phi_{1,\delta}(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}v - \beta^2\int_0^b (b-y)\xi(y)\mathrm{d}y\Big],
\end{aligned}
$$

$$a = 2\beta+2\alpha+\delta, \quad a_1 = (a+2\delta)c_1, \quad a_2 = -(\alpha+\beta+\delta)^2, \quad a_3 = (\alpha+\beta+2\delta)^2,$$

$$K_1(u,v) = \Big[a_1 + a_2 v + a_3 u + \int_v^u F(z-v)\mathrm{d}z\Big]\Big/(u\delta+c_1)^2;$$

$$G_2(u) = \Big[\beta^2\int_b^u \Big[\int_0^b F(v-y)\phi_{1,\delta}(y)\mathrm{d}y + (u-v)\xi(v)\Big]\mathrm{d}v + b_1u + b_2\Big]\Big/(u\delta+c_2)^2,$$

$$b_1 = N(\delta) - \beta^2\int_0^b F(b-v)\phi_{1,\delta}(v)\mathrm{d}v, \quad b_2 = (b\delta+c_2)^2\phi_{2,\delta}(b) - bb_1,$$

$$
\begin{aligned}
N(\delta) =& \big((b+1)\delta+c_2\big)^2\phi_{2,\delta}(b+1) - (b\delta+c_2)^2\phi_{2,\delta}(b) - \beta^2\int_b^{b+1}\int_b^v \xi(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}v \\
&-\beta^2\int_b^{b+1}\int_0^b F(v-y)\phi_{1,\delta}(v)\mathrm{d}y\mathrm{d}v + \beta^2\int_0^b F(b-v)\phi_{1,\delta}(v)\mathrm{d}v \\
&-\int_b^{b+1}\Big[(a+2\delta)c_2 + a_2(b+1) + (2\delta^2+a\delta-a_2)v + \beta^2\int_v^{b+1}F(z-v)\mathrm{d}z\Big]\phi_{2,\delta}(v)\mathrm{d}v,
\end{aligned}
$$

$$K_2(u,v) = \Big[(a+2\delta)c_2 + a_2u + (2\delta^2+a\delta-a_2)v + \beta^2\int_v^u F(z-v)\mathrm{d}z\Big]\Big/(u\delta+c_2)^2.$$

证明　对 (5), (6) 式两边积分便得结论。

定理 3　当 $\delta=0$ 时，风险模型 (2) 的罚金折现期望函数 $\phi(u)$ 为

$$\phi(u)=\begin{cases}\phi_1(u)=g_1(u)+\int_0^u L(u,s)g_1(s)\mathrm{d}s, & 0\le u<b;\\ \phi_2(u)=g_2(u)+\int_b^u N(u,s)g_2(s)\mathrm{d}s, & u\ge b.\end{cases}\tag{11}$$

其中

$$g_1(x)=\Big[\beta^2\int_0^x(x-v)\xi(v)\mathrm{d}v+\big[c_1^2\phi_1'(0)-2qc_1\phi_1(0)\big]x+c_1^2\phi_1(0)\Big]/c_1^2,$$

$$\phi_1'(0)=\big[\beta^2[(2q-c_1r_1)\tilde{\xi}(r_2)-(2q-c_1r_2)\tilde{\xi}(r_1)]\big]/\big[c_1^3(r_1-r_2)\big],$$

$$\phi_1(0)=\big[\beta^2[\tilde{\xi}(r_2)-\tilde{\xi}(r_1)]\big]/\big[c_1^2(r_1-r_2)\big],\quad q=\alpha+\beta,$$

$$L(u,s)=\sum_{m=1}^{\infty}l_m(u,s),\quad u>s\ge0,\quad l_m(u,s)=\int_s^u K_1(u,t)l_{m-1}(t,s)\mathrm{d}t,\quad m=2,3,\cdots,$$

$$l_1(u,s)=K_1(u,s),\quad K_1(u,s)=\Big[2qc_1-q^2s+q^2u+\int_s^u F(z-s)\mathrm{d}z\Big]/c_1^2;$$

$$g_2(x)=\Big[\beta^2\int_b^x\Big[\int_0^b F(v-y)\phi_1(y)\mathrm{d}y+(x-v)\xi(v)\Big]\mathrm{d}v+d_1x+d_2\Big]/c_2^2,$$

$$d_1=c_1c_2\phi_1'(b)-2qc_2\phi_1(b)-\beta^2\int_0^b F(b-v)\phi_1(v)\mathrm{d}v,\quad d_2=c_1c_2\phi_1(b)-bd_1,$$

$$N(u,s)=\sum_{m=1}^{\infty}h_m(u,s),\quad u>s\ge0,\quad h_m(u,s)=\int_s^u K_2(u,t)h_{m-1}(t,s)\mathrm{d}t,\quad m=2,3,\cdots,$$

$$h_1(u,s)=K_2(u,s),\quad K_2(u,s)=\Big[2qc_2-q^2(u-s)+\beta^2\int_s^u F(z-s)\mathrm{d}z\Big]/c_2^2.$$

证明　当 $\delta=0$ 且 $b=\infty$ 时，记方程 (10) 中 (i) 式的解为 $\phi_1^{\infty}(u)$；$\delta=0$ 时，记方程 (i) 的解为 $\phi_1(u)$。因为 $\phi_1^{\infty}(u)$ 为方程 (i) 的特解，故有 $\phi_1^{\infty}(0)=\phi_1(0)$，$\phi_1'^{\infty}(0)=\phi_1'(0)$。因此利用文献 [12] 中的结论可得

$$\phi_1^{\infty}(0)=\big[\beta^2[\tilde{\xi}(r_2)-\tilde{\xi}(r_1)]\big]/\big[c_1^2(r_1-r_2)\big],\tag{12}$$

其中

$$\tilde{\xi}(s)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-sx}\xi(x)\mathrm{d}x,$$

r_1,r_2 为方程 $(c_1s-\alpha-\beta)^2=\beta^2\tilde{f}(s)$ 的两个非负根，且有 $0\le r_1<(\alpha+\beta)/c_1<c_2$，这里

$$\tilde{f}(s)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}F(x).$$

再利用文献 [12] 中定理 4 的证明可得

$$2(\alpha+\beta)c_1\phi_1^{\infty}(0)-c_1^2\phi_1'^{\infty}(0)=c_1^2r_2\phi_1^{\infty}(0)+\beta^2\tilde{\xi}(r_2),\tag{13}$$

从而

$$\phi_1^{\infty\prime}(0)=[\beta^2[(2q-c_1r_1)\tilde{\xi}(r_2)-(2q-c_1r_2)\tilde{\xi}(r_1)]]/[c_1^3(r_1-r_2)],\quad q=\alpha+\beta.\tag{14}$$

将 (12), (14) 式代入方程 (i)，则方程 (i) 变为“第二类非齐次Volterra积分方程”，可得其解为 (11) 式中的 $\phi_1(u)$。

下面给出当 $\delta=0$ 时，方程 (10) 中 (ii) 的解。因为 $\phi(u)$ 在 $u=b$ 处是连续的，故有 $\phi_1(b)=\phi_2(b)$。类似定理1中的证明可证得：$c_1\phi_1^{'}(b)=c_2\phi_2^{'}(b)$，其中 $\phi_1(b)$, $\phi_1^{'}(b)$ 均可由 (11) 式中第一式得到。从而 (ii) 式亦可化为“第二类非齐次Volterra积分方程”，于是可得其解为 (11) 式中的 $\phi_2(u)$。综上，当 $\delta=0$ 时，(11) 式成立。

推论1 当 $\delta=0$ 时，模型 (2) 的破产概率为

$$\psi(u)=\begin{cases}\psi_1(u)=g_1^*(u)+\int_0^u L^*(u,s)g_1^*(s)\mathrm{d}s, & 0\le u<b;\\ \psi_2(u)=g_2^*(u)+\int_b^u N^*(u,s)g_2^*(s)\mathrm{d}s, & u\ge b.\end{cases}\tag{15}$$

其中

$$g_1^*(x)=\Big[\beta^2\Big(\frac{1}{2}x^2-\int_0^x(x-v)F(v)\mathrm{d}v\Big)+\big[c_1^2\psi^{'}(0)-2\beta c_1\psi(0)\big]+c_1^2\psi(0)\Big]/c_1^2,$$

$$\psi'(0)=\big[\beta^2[(2\beta-c_1r_1)\tilde{F}(r_1)-(2\beta-c_1r_2)\tilde{F}(r_2)]\big]/\big[c_1^3(r_1s-r_2)\big]$$
$$+\big[\beta^2(2\beta-c_1(r_1+r_2))\big]/[c_1^3r_1r_2],$$

$$\psi_1(0)=\big[\beta^2[\tilde{F}(r_2)-\tilde{F}(r_1)]\big]/\big[c_1^2(r_1-r_2)\big]+\beta^2/(c_1^2r_1r_2),$$

$$L^*(u,s)=\sum_{m=1}^{\infty}l_m^*(u,s),\quad u>s\ge 0,\quad l_m^*(u,s)=\int_s^u K_1^*(u,t)l_{m-1}^*(t,s)\mathrm{d}t,\quad m=2,3,\cdots,$$

$$l_1^*(u,s)=K_1^*(u,s),\quad K_1*(u,s)=\Big[2\beta c_1-\beta^2s+\beta^2u+\int_s^u F(z-s)\mathrm{d}z\Big]/c_1^2,$$

$$g_2^*=\Big[\beta^2\int_0^x\Big[\int_0^b F(v-y)\psi_1(y)\mathrm{d}y-(x-v)F(v)\Big]\mathrm{d}v+d_1^*+d_2^*\Big]/c_2^2,$$

$$d_1^*=c_1c_2\psi_1^{'}(b)-2\beta c_2\psi_1(b)-\beta^2\int_0^b F(b-v)\psi_1(v)\mathrm{d}v-b,$$

$$d_2^*=c_1c_2\psi_1(b)-bd_1^*+\frac{1}{2}(u^2+b^2),$$

$$N^*(u,s)=\sum_{m=1}^{\infty}h_m^*(u,s),\quad u>s\ge 0,\quad h_m^*(u,s)=\int_s^u K_2^*(u,t)h_{m-1}^*(t,s)\mathrm{d}t,\quad m=2,3,\cdots,$$

$$h_1^*(u,s)=K_2^*(u,s),\quad K_2^*(u,s)=\Big[2\beta c_2-\beta^2(u-s)+\beta^2\int_s^u F(z-s)\mathrm{d}z\Big]/c_2^2.$$

证明 只需在 (11) 式中令 $\alpha=0$, $\omega(x,y)=1$ 即可。

推论2 当 $\delta=0$ 时，模型 (2) 的破产前瞬时盈余和破产赤字的联合分布为

$$G(x,y|u)=\begin{cases}G_1(x,y|u)=g_1(x,y|u)+\int_0^u L^{**}(u,s)g_1(x,y|s)\mathrm{d}s, & 0\le u<b;\\ G_2(x,y|u)=g_2(x,y|u)+\int_b^u N^{**}(u,s)g_2(x,y|s)\mathrm{d}s, & u\ge b.\end{cases}\tag{16}$$

其中

$$g_1(x,y|u)=\Big[\beta^2\int_0^x(u-v)\big[F(v+y)-F(v)\big]\mathrm{d}v$$

$$+\big[c_1^2G_1'(x,y|0)-2\beta c_1G_1(x,y|0)\big]u+c_1^2G_1(x,y|0)\Big]/c_1^2,$$

$$G_1'(x,y|0)=\beta^2\Big[(2\beta-c_1r_1)\int_0^x \mathrm{e}^{-r_2v}(F(v+y)-F(v))\mathrm{d}v$$

$$-(2\beta-c_1r_2)\int_0^x \mathrm{e}^{-r_1v}(F(v+y)-F(v))\mathrm{d}v\Big]/\big[c_1^3(r_1-r_2)\big],$$

$$G_1(x,y|0)=\Big[\beta^2\int_0^x(\mathrm{e}^{-r_2v}-\mathrm{e}^{-r_1v})(F(v+y)-F(v))\mathrm{d}v\Big]/\big[c_1^2(r_1-r_2)\big],$$

$$L^{**}(u,s)=\sum_{m=1}^{\infty}l_m^{**}(u,s),\quad u>s\geq 0,$$

$$l_m^{**}(u,s)=\int_s^u K_1^{**}(u,t)l_{m-1}^{**}(t,s)\mathrm{d}t,\quad m=2,3,\cdots,$$

$$l_1^{**}(u,s)=K_1^{**}(u,s),\quad K_1^{**}(u,s)=\Big[2\beta c_1-\beta^2s+\beta^2u+\int_s^u F(z-s)\mathrm{d}z\Big]/c_1^2,$$

$$g_2(x,y|u)=\Big[\beta^2\int_0^x\int_0^b F(v-s)G_1(x,y|s)\mathrm{d}s\mathrm{d}v$$

$$+\beta^2\int_b^x(u-v)\big[F(v+y)-F(v)\big]\mathrm{d}v+d_1^{**}u+d_2^{**}\Big]/c_2^2,$$

$$d_1^{**}=c_1c_2G_1'(x,y|b)-2\beta c_2G_1(x,y|b)-\beta^2\int_0^b F(b-v)G_1(x,y|v)\mathrm{d}v,$$

$$d_2^{**}=c_1c_2G_1(x,y|b)-bd_1^{**},\quad N^{**}(u,s)=\sum_{m=1}^{\infty}h_m^{**}(u,s),\quad u>s\geq 0,$$

$$h_m^{**}(u,s)=\int_s^u K_2^{**}(u,t)h_{m-1}^{**}(t,s)\mathrm{d}t,\quad m=2,3,\cdots,\quad h_1^{**}(u,s)=K_2^{**}(u,s),$$

$$K_2^{**}(u,s)=\Big[2\beta c_2-\beta^2(u-s)+\beta^2\int_s^u F(z-s)\mathrm{d}z\Big]/c_2^2.$$

证明 只需在 (11) 式中令 $\alpha=0$, $\omega(x,y)=I(x_1<x,x_2<y)$ 即可。

参考文献：

[1] Gerber H U, Shiu E S W. On the time value of ruin[J]. North American Actuatial Journal, 1998, 2(1): 48-78

[2] David C M, Dickson, Christian Hipp. Ruin probabilities for Erlang(2) risk processes[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 1998, 22(3): 251-262

[3] David C M, Dickson, Christian Hipp. On the time to ruin for Erlang(2) risk processes[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2001, 29(3): 333-3442

[4] Sun L J, Yang H L. On the joint distribution of surplus immediately before ruin and the deficit at ruin for Erlang(2) risk processes[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2004, 34(2): 121-125
[5] Cary Chi-Liang Tsai, Sun L J. On the discounted distribution functions for the Erlang(2) risk processes[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2004, 35(1): 5-19
[6] Cheng Y B, Tang Q H. Moments of the supplus before ruin and the deficit at ruin in the Erlang(2) risk process[J]. North American Actuatial Journal, 2003, 7(1): 1-12
[7] Cai J, David C M, Dickson. On the expected discounted penalty function at ruin of a surplus process with interest[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2002, 30(3): 389-404
[8] Kam C Y, Wang G J, Li W K. On renewal risk process with stochastic interest force[J]. Stochastic Processes and Their Application, 2006, 116(10): 1496-1510
[9] 吴荣，杜勇宏. 常利率下的更新风险模型[J]. 工程数学学报，2002, 19(1): 46-54
Wu R, Du Y H. The renewal risk model with constant interest force[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2002, 19(1): 46-54
[10] 宗昭军，胡锋，元春梅. 具有线性红利界限的破产理论[J]. 工程数学学报，2006, 23(2): 319-323
Zong Z J, Hu F, Yuan C M. The ruin theory in the presence of a linear dividend barrier[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2006, 23(2): 319-323
[11] Zhang X H, Wang R M. A class of integral equations of Erlang(2) risk process under interest force[J]. Chinese Journal of Applied Probability, 2003, 19(3): 252-258
[12] Nie G Q, Liu C H, Xu L X. Expected discounted penalty function of Erlang(2) risk model with constant interest[J]. Appl Math J Chinese Univ Ser B, 2006, 21(3): 243-251

The Expected Discounted Penalty Function for the Erlang(2) Risk Model with a Threshold Strategy Under Constant Interest

LIU Xiang-zeng[1], TIAN Zheng[1], ZHANG Yan[2]

(1- Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University Xi'an 710072;
2- Department of Mathematics, PLA University of Science and Technology, Nanjing 211101)

Abstract: In this paper, in order to describe the actual business venture operating conditions more accurately, we extend the Erlang(2) risk model to the Erlang(2) risk model with a threshold strategy under constant interest. Firstly, the integro-differential equations and the intergral equations satisfied by the expected discounted penalty function are derived by analyzing the risk process and utilizing the total probability formula. Furthermore, the intergral equations are reduced to the second kind of non-homogeneous Volterra integral equations when the interest rate is zero, and the explicit solutions to the integral equations are obtained. Finally, the explicit formulae for the ruin probability and the joint distribution of the surplus immediately before ruin and the deficit at ruin are given in the interest-free case.

Keywords: Erlang(2) risk model; the expected discounted penalty function; threshold strategy; integro-differential equations

Received: 18 June 2007. **Accepted:** 18 Sep 2008.
Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (60375003); the Aeronautics and Astronautics Basal Science Foundation of China (03I53059).